



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ  
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E PÓS-GRADUAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE FÍSICA**

**MARCOS CAVALCANTE FURTADO**

**Modelagem matemática de oscilações com parâmetro de amortecimento transiente**

**MACAPÁ-AP  
2023**

MARCOS CAVALCANTE FURTADO

**Modelagem matemática de oscilações com parâmetro de amortecimento  
transiente**

Monografia apresentada à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso, como requisito avaliativo do Programa de Pós-Graduação *lato sensu* em Ensino de Física da Universidade Federal do Amapá, sob orientação do Prof. Dr. Marcelo Ricardo Souza Siqueira.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Examinador 1: Prof. Dr. Robert Ronald Maguiña Zamora (FÍSICA/UNIFAP)

---

Examinador 2: Prof. Dr. Yony Walter Milla Gonzalez (FÍSICA/UNIFAP)

---

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ricardo Souza Siqueira (FÍSICA/UNIFAP)

**MACAPÁ-AP  
2023**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Biblioteca Central/UNIFAP-Macapá-AP  
Elaborado por Mário das Graças Carvalho Lima Júnior – CRB-2 / 1451

---

F992 Furtado, Marcos Cavalcante.  
Modelagem matemática de oscilações com parâmetro de amortecimento transiente /  
Marcos Cavalcante Furtado. - Macapá, 2023.  
1 recurso eletrônico. 26 folhas.

Monografia (Especialização) - Universidade Federal do Amapá, Especialização no Ensino  
de Física, Macapá, 2023.  
Orientador: Marcelo Ricardo Souza Siqueira.

Modo de acesso: World Wide Web.  
Formato de arquivo: Portable Document Format (PDF).

1. Oscilador harmônico amortecido. 2. Amortecimento transiente. 3. Método de séries. I.  
Siqueira, Marcelo Ricardo Souza, orientador. II. Unifap. III. Título.

CDD 23. ed. – 530

---

FURTADO, Marcos Cavalcante. **Modelagem matemática de oscilações com parâmetro de amortecimento transiente.**  
Orientador: Marcelo Ricardo Souza Siqueira. 2023. 26 f. Monografia (Especialização) - Especialização no Ensino de Física.  
Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2023.

## Resumo

Este trabalho propõe uma alteração no termo de amortecimento da equação do oscilador harmônico amortecido, de forma que o termo de resistência ao movimento não seja apenas proporcional à velocidade, mas a um produto entre velocidade e tempo, do tipo  $\gamma(t)v(t) = \alpha tv(t)$ . Em outras palavras, a equação diferencial associada deixaria de ser de coeficientes constantes, tornando-se de coeficientes variáveis. Isso muda o método de solução e a forma de analisar o fenômeno. Para resolver esta equação, foram testados diversos métodos, porém o que se revelou mais frutífero foi o método de série de potências, ou método de Fröbenius. Para complementar este estudo e testar sua viabilidade física, métodos de computação numérica usando a linguagem Python foram empregados. Os resultados mostram consistência física, porém dentro de um intervalo finito de tempos.

**Palavras-chaves:** Oscilador harmônico amortecido. Amortecimento Transiente. Método de séries. Análise numérica.

## Abstract

In this work we propose an alteration in the damping term of the damped harmonic oscillator equation, proposing that the resistance to motion term is not only proportional to velocity but a product between velocity and time, of the type  $\gamma(t)v(t) = \alpha tv(t)$ . In a broader aspect, the associated differential equation would no longer be constant coefficients, but variable coefficients. This changes the method of solution and the way of analyzing the phenomenon. Several methods were tested to solve this equation, but the one that proved to be more fruitful was the power series solution method, or Fröbenius method. To complement this study and test its physical feasibility, numerical computation methods using the Python language were employed. The results demonstrate physical consistency, but within a finite range of times.

**Keywords:** Damped harmonic oscillator. Transient Damping. Series method. Numerical analysis.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Referencial Teórico</b>	<b>8</b>
2.1	OHA convencional	8
2.2	Oscilador com amortecimento linearmente variável	10
2.3	Abordagem lagrangiana e hamiltoniana para sistemas dissipativos	13
<b>3</b>	<b>Discussão e Resultados</b>	<b>15</b>
3.1	Balanço de energia do sistema	15
<b>4</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>17</b>
	<b>Referências</b>	<b>18</b>
4.1	Apêndice 1 - códigos do <i>Google Collaboratory</i> para geração de gráficos	19
4.2	Apêndice 2 - capa da publicação gerada durante o desenvolvimento deste trabalho	25

# 1 Introdução

As oscilações estão presentes em todos os campos da Física, desde um simples problema de equilíbrio na Mecânica até a transição entre estados quânticos igualmente espaçados, como no caso do Oscilador Harmônico Quântico [1]. Leonard Euler (1707-1783) foi um dos primeiros a abordar o problema das oscilações de forma a obter soluções. Resolveu o Oscilador Harmônico Simples (OHS) e depois o forçado usando o método de quadraturas, sendo o primeiro a observar o fenômeno da ressonância - quando a frequência das oscilações naturais do sistema se aproximam da frequência do termo de fonte. Também participou dos esforços de Joseph Louis Lagrange (1736-1813) para a formulação lagrangiana das oscilações amortecidas [1-4].

Apesar dos diversos estudos já publicados sobre osciladores harmônicos, é sempre prudente e elucidante revisitá-lo, na tentativa de trazer novas abordagens e modelagens matemáticas. Existem alguns trabalhos sobre osciladores amortecidos com parâmetros variáveis. O mais notório foi desenvolvido por V. Aguiar e I. Guedes [5], que analisaram os osciladores de Lane-Emden, onde a massa era do tipo  $m(t) = m_0 e^{\gamma t}$ , com  $\gamma > 0$ , e o fator de amortecimento é do tipo  $\gamma(t) = \frac{1}{t}$ . Os resultados são comparados com os de Caldirola-Kanai [6] e foram obtidas expressões para a posição, velocidade e momento. Além disso, o diagrama de fases deste sistema é analisado e comparado a outros casos semelhantes.

Primeiro, é apresentado o diagrama de fase do OH com amortecimento subcrítico, cuja solução é a única que oscila com amplitude decrescente, indicando que o sistema é dissipativo. Além disso, o diagrama mostra que tanto  $x(t)$  quanto  $p(t)$  se anulam para  $t$  suficientemente grande. Diagrama este, bastante similar ao diagrama de fase para o oscilador de Caldirola-Kanai que, por sua vez, possui as mesmas expressões para  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$ . A diferença é que  $p(t)$  cresce com o tempo devido ao crescimento exponencial de  $m(t)$ , o que também se assemelha ao oscilador de Lane-Emden, mas difere no fato de a amplitude tanto de  $x(t)$  quanto de  $\dot{x}(t)$  decaírem de forma mais lenta em comparação aos seus valores no oscilador CK. Isto se deve ao fato que, para o oscilador LE, o termo de amortecimento diminui à medida que o tempo passa.

A proposta do presente trabalho é trazer uma abordagem matemática alternativa para o problema do oscilador amortecido, proporcionando a construção investigativa do conhecimento, em roupagem similar aos estudos citados acima. Aqui, consideramos o parâmetro de amortecimento como função linear do tempo,  $\gamma(t) = \alpha t$ . Diferentemente do que está presente na literatura, cuja equação de movimento apresenta esse parâmetro como função linear apenas da velocidade, a abordagem aqui desenvolvida torna a equação do oscilador amortecido uma equação de coeficientes variáveis. Os métodos de solução tradicionais para a equação com coeficientes constantes já não são mais válidos e então empregamos outras abordagens para obter uma solução para este sistema. Dentre todas

elas, a mais frutífera foi o método de série de potências, como será explicado na sequência.

Ao considerar o termo de amortecimento transiente, propomos uma variação do tipo polinômio do 1º grau no tempo vezes a velocidade, o que representa uma resistência nula no instante inicial, mas que cresce com a velocidade e com o tempo. Uma possível situação física onde isso pode acontecer seria uma massa puntiforme que entra em movimento em um fluido que está esfriando [?, ?]. A constante  $\alpha$  em  $\gamma(t) = \alpha t$  pode servir como parâmetro de ajuste, podendo “ligar e desligar” o termo de resistência ao movimento. Obviamente, os métodos utilizados nos livros de física básica sobre esse conteúdo não resolvem tal equação. Apesar de aplicações diretas na Física, a união de métodos e o estudo sobre este sistema é muito interessante e complementa casos análogos já estudados.

Dentre as técnicas idealizadas para obter soluções para este problema, o método de séries de potências (ou de Fröbenius) [7, 8] foi o mais adequado, uma vez que trouxe resultados semelhantes aos encontrados nas referências, à exceção de algumas correções de ordem superior adicionais em relação a solução geral. Ao tomar o limite adequado, recupera-se os casos conhecidos do Oscilador Harmônico Simples (OHS). Ao final deste estudo, espera-se que seja possível contribuir, ainda que modestamente, à dinâmica do Oscilador Harmônico (OH) e trazer ainda mais relevância nas discussões do ensino de Física no nível superior. Nesse sentido, o trabalho propõe também explorar mais profundamente conceitos, métodos e conclusões relativas ao modelo do OH, que é um dos modelos mais fundamentais quando se discute física teórica.

O objetivo final almejado por este trabalho foi contribuir com os debates sobre OHS e seus métodos matemáticos em ensino de Física a nível de graduação, simplificando conceitos e apresentando material com conteúdo conciso e útil à formação do físico professor. Além disso, é sempre necessário associar à formação acadêmica o espírito investigativo, abordando sistemas conhecidos ou até desconhecidos, porém usando métodos consistentes para embasar as conclusões. Neste sentido, este trabalho atingiu sua finalidade.

Espera-se que este trabalho leve a desdobramentos importantes dentro do nosso campo de estudo, especificamente nas espécies de forças de resistência ao movimento dos corpos. Tais desenvolvimentos no campo da física matemática levam a criação de modelos e afins, que podem contribuir cada vez mais para o conhecimento de nosso mundo e nosso universo.

A seguir é feita uma breve revisão dos casos principais que envolvem o OHA convencional e em seguida são apresentados os passos que desenvolvemos até chegar na solução do problema idealizado. Posteriormente, fazemos uma análise e um breve discussão destes resultados, culminando em nossas conclusões.

## 2 Referencial Teórico

### 2.1 OHA convencional

Um OHA descreve um sistema que oscila ao redor de um ponto de equilíbrio estável, mas com uma amplitude cada vez menor devido à atuação de um mecanismo de amortecimento. Este é geralmente introduzido por meio de um termo dissipativo, como atrito ou resistência elétrica, ou arrasto de um fluido, etc, que age para reduzir a potência do sistema. São encontrados em muitas aplicações práticas, como sistemas mecânicos, elétricos e eletrônicos, controladores de velocidade de motores elétricos, sistemas de amortecimento de vibrações, circuitos RLC e sistemas dinâmicos em geral [1-5,7,8].

A equação de movimento de um oscilador amortecido é geralmente dada pela equação diferencial de segunda ordem

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad (2.1)$$

onde  $m$  é a massa do sistema,  $c$  é a constante de amortecimento,  $k$  é a constante de elasticidade e  $x(t)$  é a posição do sistema em relação ao tempo.

A solução para essa equação é geralmente dada por uma função exponencial decrescente, com a amplitude da oscilação diminuindo exponencialmente com o tempo. A constante de amortecimento é dada pela razão  $c/m$ . A solução geral para esta equação pode ser dada por:

$$x(t) = e^{\frac{-c}{2m}t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \quad (2.2)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes determinadas pelas condições iniciais do sistema e  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{c}{2m})^2}$  é a frequência do oscilador amortecido.

Este sistema pode ser encaixado em três casos distintos no que se refere ao seu tipo de amortecimento: subcrítico, crítico e supercrítico. Para diferenciar cada caso devemos comparar a frequência natural ( $\frac{k}{m}$ ) com a frequência relacionada ao termo dissipativo  $(\frac{c}{2m})^2$ , ou seja, essas classificações dependem da relação entre a taxa de amortecimento e a frequência natural do oscilador. É preciso analisar o valor da constante de amortecimento  $c$  em relação ao valor crítico  $c_c = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$  para identificar cada caso [1-4].

O *amortecimento subcrítico* ( $c < c_c$ ) é relativamente baixo (veja a fig. 1). A frequência natural será maior que a frequência relacionada ao termo dissipativo e o sistema irá completar várias oscilações, porém devido a dissipação de energia a amplitude de oscilação irá reduzir gradualmente até a massa atingir o ponto de equilíbrio [9]. A solução para essa situação é dada pela equação

$$x(t) = e^{\frac{-c}{2m}t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (2.3)$$

onde A e B são constantes determinadas pelas condições iniciais do sistema.

No *amortecimento crítico* ( $c = c_c$ ) o sistema está na transição entre o caso subamortecido e o superamortecido (veja a fig. [1](#)). O termo dissipativo se iguala ao termo de frequência natural ( $\omega_0 = \frac{k}{m}$ ) de forma que o sistema retorne ao equilíbrio com oscilações de amplitude e duração intermediária, quando comparadas com os outros casos. A solução para essa situação é dada pela equação

$$x(t) = (A + Bt)e^{\frac{-c}{2m}t}, \quad (2.4)$$

onde, novamente, A e B são constantes determinadas pela condição inicial do sistema. Esse tipo de fenômeno físico tem aplicações práticas diretamente aplicáveis ao cotidiano, como, por exemplo, na construção dos amortecedores que fecham as portas automaticamente, pois ao abrir ela deve voltar para a posição de equilíbrio de forma espontânea sem colidir com o batente [9,10](#).

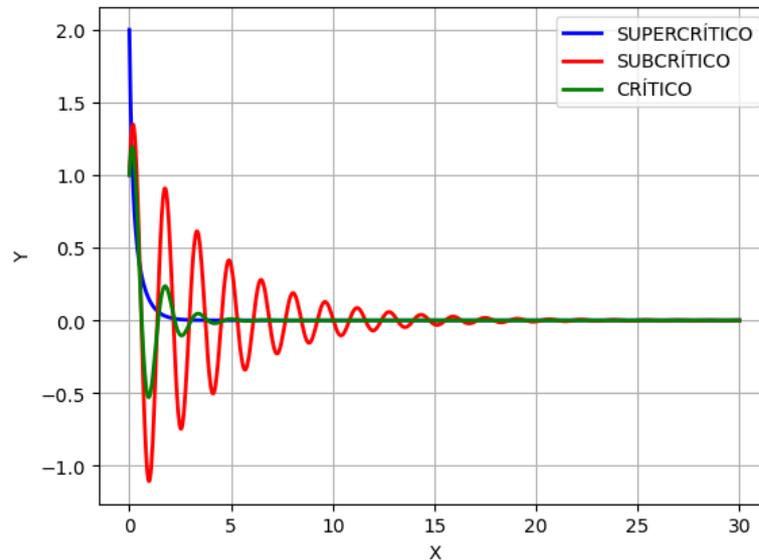


Figura 1 – Oscilador amortecido e exemplos dos seus três casos: (a) supercrítico (em azul), subcrítico (em vermelho) e crítico (em verde). As constantes da combinação linear das equações [\(2.3\)](#), [\(2.4\)](#) e [\(2.5\)](#) foram todas igualadas a 1. Os parâmetros ( $m, c, k$ ) foram, respectivamente, (1, 10, 4), (1, 0,5, 4) e (1, 2, 4).

Por último, no *amortecimento supercrítico* ( $c > c_c$ ) o amortecimento é ajustado de forma que o sistema retorne ao equilíbrio o mais rápido possível, sem realizar oscilações em torno do ponto de equilíbrio, pois prevalece o amortecimento. A solução para essa situação é dada pela equação

$$x(t) = e^{\frac{-c}{2m}t}(Ae^{\omega_i t} + Be^{-\omega_i t}) \quad (2.5)$$

onde, mais uma vez, A e B são constantes determinadas pelas condições iniciais e  $\omega_i = \sqrt{(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m}}$  é a frequência imaginária. Existem aplicações diretas destes conceitos quando se estuda o escoamento de fluidos em função do número de Reynolds, que mede a relação entre as forças inerciais e viscosas em um fluido. Quando este número é relativamente alto, o amortecimento supercrítico pode se manifestar [9,10](#).

As oscilações governadas pela equação (2.1) são bem estudadas e conhecidas. Elas têm sua importância geral no sentido de serem o protótipo para a abordagem de sistemas e equações mais complexos. Conceitos como espaços vetoriais de funções ortogonais, operadores hermitianos, séries e transformadas, foram e ainda podem ser muito bem explorados para tais sistemas. A seguir, iremos introduzir uma pequena alteração nesta equação e abordar o caso da dependência linear do parâmetro de amortecimento com a variável independente.

## 2.2 Oscilador com amortecimento linearmente variável

Considere a equação do oscilador harmônico para um parâmetro  $\gamma$  variável com o tempo.

$$\ddot{x} + \gamma(t)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.6)$$

onde  $\gamma(t)\dot{x} = \alpha t\dot{x}$  é uma força de resistência proporcional à velocidade e ao tempo (linearmente). Vamos resolver (2.6) via série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} na_n t^n + \omega_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \quad (2.7)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + \omega_0^2 a_n]t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha na_n t^n = 0 \quad (2.8)$$

$$2 \cdot 1 \cdot a_2 + \omega_0^2 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\omega_0^2 + \alpha n)a_n]t^n = 0 \quad (2.9)$$

Para que essa equação seja válida, devemos ter as duas condições

$$2a_2 + \omega_0^2 a_0 = 0 \rightarrow a_2 = -\frac{\omega_0^2}{2}a_0 \quad (2.10)$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\omega_0^2 + \alpha n)a_n = 0 \rightarrow a_{n+2} = \frac{-(\omega_0^2 + \alpha n)a_n}{(n+2)(n+1)} \quad (2.11)$$

Vamos obter os coeficientes

$$\begin{aligned} n = 1 \rightarrow a_3 &= \frac{(-1)(\omega_0^2 + \alpha)}{3 \cdot 2 \cdot 1} a_1 \\ n = 2 \rightarrow a_4 &= \frac{-(\omega_0^2 + 2\alpha)}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{(-1)^2(\omega_0^2 + 2\alpha)\omega_0^2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a_0 \\ n = 3 \rightarrow a_5 &= \frac{-(\omega_0^2 + 3\alpha)}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{(-1)^3(\omega_0^2 + 3\alpha)(\omega_0^2 + \alpha)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a_1 \\ n = 4 \rightarrow a_6 &= \frac{-(\omega_0^2 + 4\alpha)}{6 \cdot 5} a_4 = \frac{(-1)^4(\omega_0^2 + 4\alpha)(\omega_0^2 + 2\alpha)\omega_0^2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a_0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

⋮

Generalizando, temos:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} t^{2n+1} \quad (2.13)$$

$$x(t) = a_0 \left[ 1 - \frac{(\omega_0 t)^2}{2!} + \frac{(\omega_0^2 + 2\alpha)\omega_0^2 t^4}{4!} - \frac{(\omega_0^2 + 4\alpha)(\omega_0^2 + 2\alpha)\omega_0^2 t^6}{6!} + \dots \right] +$$

$$+ a_1 \left[ t - \frac{(\omega_0^2 + \alpha)t^3}{3!} + \frac{(\omega_0^2 + 3\alpha)(\omega_0^2 + \alpha)t^5}{5!} - \frac{(\omega_0^2 + 5\alpha)(\omega_0^2 + 3\alpha)(\omega_0^2 + \alpha)t^7}{7!} + \dots \right] \quad (2.14)$$

É preciso manipular esses termos de modo a enxergar a solução correta, separando o que é oscilação simples e o que é amortecimento. A primeira estratégia é isolar os termos que levam às séries do seno e do cosseno. Lembrando que se  $\gamma$  fosse constante, então deveria aparecer uma exponencial decrescente atuando nas duas componentes da solução. Desta forma, temos a seguinte expressão para a solução da equação 2.6:

$$x(t) = a_0 \left[ 1 - \frac{(\omega_0 t)^2}{2!} + \frac{(\omega_0 t)^4}{4!} - \frac{(\omega_0 t)^6}{6!} + \dots \right] + a_0 \left[ \frac{2\alpha\omega_0^2 t^4}{4!} - \frac{6\alpha\omega_0^4 t^6}{6!} - \frac{8\alpha^2\omega_0^2 t^6}{6!} + \dots \right] +$$

$$+ \frac{a_1}{\omega_0} \left[ \omega_0 t - \frac{(\omega_0 t)^3}{3!} + \frac{(\omega_0 t)^5}{5!} - \frac{(\omega_0 t)^7}{7!} + \dots \right] + \frac{a_1}{\omega_0} \left[ \frac{-\alpha\omega_0 t^3}{3!} + \frac{4\alpha\omega_0^3 t^5}{5!} + \frac{3\alpha^2\omega_0 t^5}{5!} + \dots \right] \quad (2.15)$$

sendo a primeira e a terceira parcela da (2.15) correspondentes a solução do OHA convencional. As demais parcelas (pelo menos as correções de 1ª potência para  $\alpha$ ) podem ser reescritas como segue:

$$x(t) = x_{OHA}(t) + a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n(n+1) \alpha \omega_0^{2n} t^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{a_1}{\omega_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 \alpha \omega_0^{2n-1} t^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (2.16)$$

Esta é uma expressão bem complicada de se trabalhar. Por simplicidade, consideremos na relação recursiva (2.11)  $\alpha = 1$  e  $\omega_0^2 = 1$ . Os termos associados à dependência linear da resistência com o tempo são plotados na figura 2. Os termos relacionados às três possíveis soluções do OHA são mostrados na figura anterior 1.

Aqui, os coeficientes  $a_0$  e  $a_1$  determinarão as soluções linearmente independentes:

$$(n+2)a_{n+2} + a_n = 0 \quad (2.17)$$

Primeiro, consideremos  $a_0 = 1$  e  $a_1 = 0$ . Ao impor essa restrição, todos os termos com índice ímpar se anulam. Logo, obtemos a solução par  $x_1(t)$ :

$$x_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} t^{2n} = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (2.18)$$

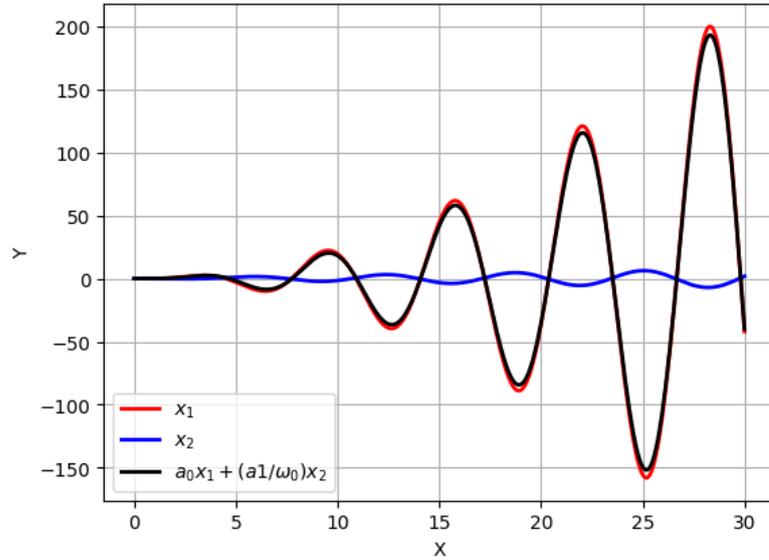


Figura 2 – Representação dos osciladores linearmente amortecidos no tempo. Nesta figura os termos foram ajustados para  $a_0 = a_1 = \alpha = \omega_0 = 1$ .

Para determinar a outra solução,  $x_2(t)$ , basta impor a restrição  $a_0 = 0$  e  $a_1 = 1$ . Dessa vez, todos os termos pares se anulam, restando

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}, \quad (2.19)$$

onde usamos a notação do fatorial duplo de  $(2n+1)$ . Logo,

$$x_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!} t^{2n+1} \quad (2.20)$$

Então, a solução procurada é simplesmente uma combinação linear de  $x_1$  e  $x_2$ .

$$x(t) = a_0 e^{-\frac{t^2}{2}} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!} t^{2n+1} \quad (2.21)$$

Diferentemente da solução  $x_1$ , não foi possível escrever  $x_2$  como uma função elementar.

A seguir, tem-se os gráficos destas duas situações distintas, onde em primeiro lugar se faz o *plot* sem as aproximações e em seguida o mesmo *plot* é feito com as aproximações que levam a solução  $x_1(t)$  a ser escrita como uma função elementar (gaussiana).

Pode-se observar que a solução  $x_1(t)$  governa em todo o intervalo e leva a uma oscilação mais caótica, com a amplitude crescente. A solução  $x_2(t)$  apresenta um comportamento mais controlado, porém aumentando com o tempo.

A seguir, dentro da aproximação realizada, tem-se o gráfico onde uma das soluções se comporta como uma função gaussiana e a outra é dada por um duplo fatorial, como destacado na equação (2.21).

Observe que neste caso a solução que governa é a  $x_1(t)$ , com o comportamento gaussiano, e que a solução  $x_2(t)$  praticamente desaparece, pois o duplo fatorial em sua expressão

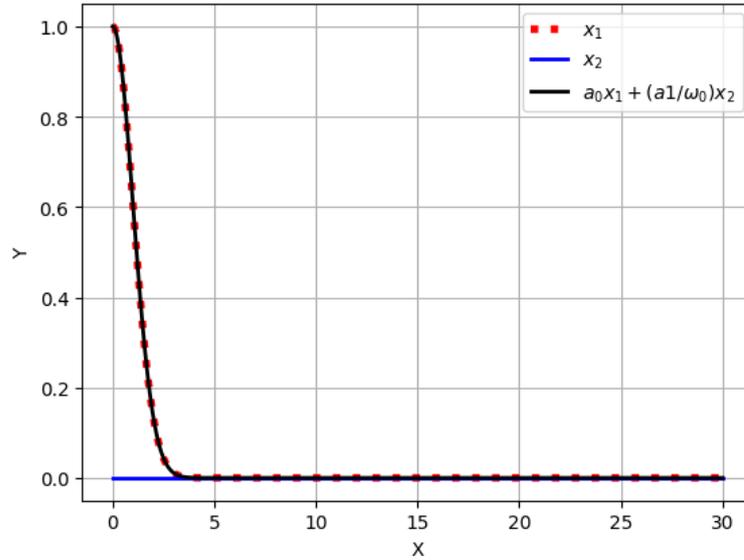


Figura 3 – Representação dos osciladores linearmente amortecidos no tempo com as devidas aproximações para que  $x_1$  seja gaussiana.

reduz muito o peso dos termos do somatório. Na solução completa, portanto, o termo dominante é o  $x_1(t)$ . Diferentemente do caso anterior, a solução mostra um comportamento mais aceitável fisicamente.

É conveniente, desta maneira, buscar sistemas mais próximos o possível de alguma situação física como a que descrevemos, para embasar nossas conclusões. Mais adiante, discutimos modelos físicos e estabelecemos elos entre eles e o modelo estudado.

Outra discussão muito interessante, nestes casos, é abordar o balanço de energia do sistema e a dependência da sua hamiltoniana com o tempo. Essa discussão é apresentada na sequência e ajuda a entender melhor tal sistema.

### 2.3 Abordagem lagrangiana e hamiltoniana para sistemas dissipativos

Para sistemas dissipativos como o caso do oscilador amortecido trabalhado, pergunta-se qual a lagrangiana que fornecerá sua equação de movimento? Esta é uma questão que até hoje está sendo discutida. Devido à dificuldade de encontrar a lagrangiana para sistemas dissipativos, Rayleigh (1842-1919) introduziu *ad hoc* na Equação de Euler-Lagrange um termo relacionado a uma função dissipativa  $F$ , isto é

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (2.22)$$

Desse modo, tomando-se uma função dissipativa do tipo proporcional à velocidade, característica do oscilador amortecido, isto é:  $F = \frac{1}{2}\lambda\dot{q}^2$  e mais a lagrangiana do OHS, a equação (2.22) reproduz a equação de movimento (2.6), com  $\lambda = \lambda(t) = m\gamma(t)$  sendo o *parâmetro de amortecimento*.

Apesar de a (2.22) reproduzir a equação de movimento dos sistemas dissipativos, ela é apenas uma descrição fenomenológica desses sistemas, já que não há nenhuma lagrangiana e nenhum Princípio Variacional envolvidos. Para contornar essa dificuldade, [11]-[13] propuseram uma lagrangiana definida por

$$L = e^{\frac{\lambda}{m}t} \left[ \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2q^2 \right] \quad (2.23)$$

que, levado à Equação de Euler-Lagrange, reproduz a (2.6).

Durante muito tempo, a lagrangiana (2.23) foi considerada como a que representava os sistemas dissipativos, pois seu hamiltoniano correspondente

$$H = p\dot{q} - L = p\dot{q} - e^{\frac{\lambda}{m}t} \left[ \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2q^2 \right] \quad (2.24)$$

aparentemente é dependente do tempo e, portanto, representaria os sistemas dissipativos. No entanto, se substituirmos a solução do OHA, dada por

$$q(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t) \quad (2.25)$$

na equação (2.24), veremos que o mesmo não é dependente do tempo e sim, que ele oscila com período  $T = \frac{\pi}{\omega}$ , onde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (2.26)$$

resultando, portanto, um valor médio constante para esse hamiltoniano, que não representa sistemas dissipativos. Concluimos então que a lagrangiana da equação (2.23) é uma *lagrangiana matemática* e não física. Um exemplo hipotético desse sistema pode ser um balde d'água oscilando numa região onde há precipitação de água que faz com que a massa  $M$  de água do balde varie segundo a expressão  $M(t) = me^{\gamma t}$  [1].

Em relação ao hamiltoniano, [6] verificou que tanto o hamiltoniano físico quanto o matemático representam a energia do sistema considerado. Porém, [14] demonstrou que a igualdade  $H = E$ , tal como proposto, só se aplica aos osciladores harmônicos. Para os sistemas dissipativos, deve-se ter

$$H = e^{\gamma t} E, \quad (2.27)$$

onde  $E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$  é a energia de um oscilador harmônico simples, com amplitude  $A$ . Isso mostra que em tais sistemas, é possível isolar um fator multiplicativo que representa o decaimento exponencial da energia inicial no tempo. De posse destas informações, é possível analisar a situação do amortecimento linearmente variável com o tempo.

## 3 Discussão e Resultados

### 3.1 Balanço de energia do sistema

Muito embora o lagrangiano proposto por Kanai-Caldirola-Bateman dado pela (2.23) tenha reproduzido a (2.6), ele, contudo, não descreve um sistema dissipativo, mas sim um sistema com massa dependente do tempo. Assim, calculemos o hamiltoniano correspondente à equação (2.6):

$$H(p, q, t) = p\dot{q} - L(p, q, t) \quad (3.1)$$

Ora, sendo  $p$  o momento canonicamente conjugado definido por:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} e^{\gamma t} \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 \right) = e^{\gamma t} m \dot{q}. \quad (3.2)$$

Substituindo a (2.23) e a (3.2) na (3.1), virá:

$$H = e^{\gamma t} \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} k q^2 \right). \quad (3.3)$$

Por outro lado, ao substituirmos a coordenada generalizada  $q$ , obtida via cálculos (2.16), teremos:

$$H = e^{\gamma t} \left[ E + \frac{m}{2} \left( a_0 \frac{d}{dt} e^{-\frac{t^2}{2}} + a_1 \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!} t^{2n+1} \right)^2 + \frac{k}{2} \left( a_0 e^{-\frac{t^2}{2}} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!} t^{2n+1} \right)^2 \right] \quad (3.4)$$

que claramente depende do tempo.

Como foi visto anteriormente, nas soluções obtidas pelo método de Fröbenius, tais soluções levam a oscilações que tendem a ser caóticas, com a amplitude crescente com o tempo. Não se trata do processo de ressonância, observado quando o oscilador simples tem sua frequência próxima àquela do termo de fonte, como numa equação  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m) \cos(\omega t)$ . As equações são diferentes em sua composição e classificação, sendo que a equação em estudo (2.6) é homogênea e de coeficientes variáveis.

Podemos impor a condição de contorno de que as oscilações não aumentem em demasia, fazendo a constante  $a_1 = 0$ . Desta forma, temos:

$$H = e^{\gamma t} \left[ E + \frac{m}{2} \left( a_0 \frac{d}{dt} e^{-\frac{t^2}{2}} \right)^2 + \frac{k}{2} \left( a_0 e^{-\frac{t^2}{2}} \right)^2 \right] \quad (3.5)$$

$$= e^{\frac{\gamma t}{m}} E + \frac{m a_0^2}{2} t^2 e^{-t^2} + \frac{k a_0^2}{2} t^2 e^{-t^2}$$

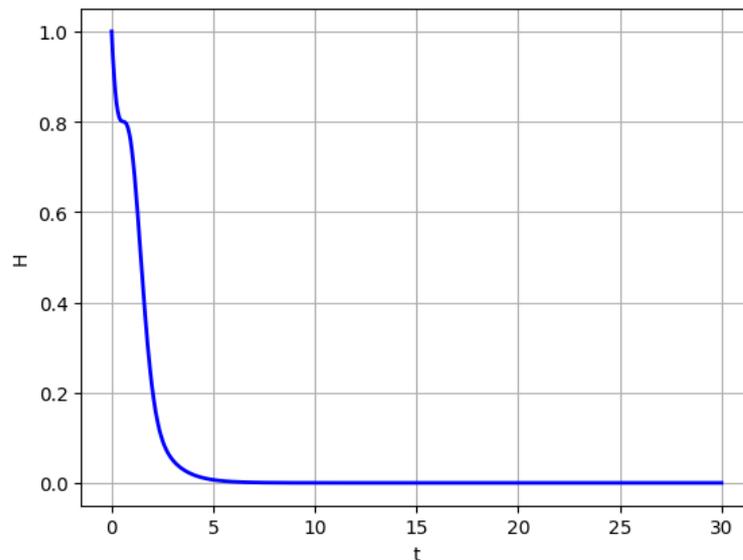


Figura 4 – Gráfico da hamiltoniana dada na equação (3.5), com todos os parâmetros feitos iguais à unidade.

O comportamento desta última equação é mostrado na figura a seguir, e se mostra mais compatível com as condições físicas de um sistema real.

É importante ressaltar que neste caso a energia do sistema dissipativo decai com o tempo, como deveria acontecer. No entanto, a restrição imposta aqui é que apenas a função gaussiana pode satisfazer as condições adequadas, levando à energia finita.

Por outro lado, a solução  $x_2(t)$  é bem mais complicada de se trabalhar, devido à existência de um duplo fatorial no denominador da eq. (2.20). Tanto que seu gráfico se mostrou praticamente nulo em todo o intervalo, o que indica um fortíssimo amortecimento do oscilador, conforme a fig. 2.

Em primeiro lugar, é possível inferir que a dissipação de energia surge naturalmente a partir do momento em que o modelo matemático aqui sugerido tem dinâmica equivalente a de um oscilador cuja massa varia exponencialmente com o tempo. Além disso, para sistemas independentes do tempo, a hamiltoniana é igual a energia do sistema. No caso proposto aqui, não foi diferente. Tanto a energia quanto o hamiltoniano tendem a zero para tempos assintóticos, coisa que não aconteceu em sistemas dissipativos como os osciladores Lane-Emden e Caldirola-Kanai [5].

Na prática, as soluções obtidas para o modelo matemático proposto - bem como para seu hamiltoniano - são consistentes com a dinâmica de um oscilador amortecido com massa variável. Temos, por exemplo, um pêndulo oscilando com amortecimento crescente (um balde vazio recebendo chuva durante um período de oscilação), o que faz sua amplitude cair rapidamente segundo a solução  $x_1(t)$  dada pela (2.18).

## 4 Considerações finais

Neste trabalho, propomos uma possível variante à equação do OHA. A saber, consideramos seu parâmetro de amortecimento como uma função linear do tempo, o que leva a equação diferencial dada em (2.6), resolvida via método de série de potências. Tal equação de movimento serve de modelo matemático a um oscilador bastante peculiar, cuja constante de amortecimento cresce segundo a relação  $\gamma(t) = \alpha t$ .

Ao resolver a (2.6), nos deparamos com duas soluções linearmente independentes, porém difíceis de analisar graficamente. Para contornar essa dificuldade, impomos algumas simplificações adequadas de modo a obter uma função elementar como solução, o que felizmente aconteceu com a gaussiana  $x_1(t)$  em (2.18). Ao plotar esse gráfico, tal solução fazia a amplitude da oscilação decair a zero muito rapidamente para tempos assintóticos, o que de certo modo era previsto.

Em seguida, foi proposto um possível formalismo lagrangiano e hamiltoniano para o sistema com base em alguns trabalhos anteriores [1, 5], o que permitiu constatar que a lagrangiana (2.23) modela tal sistema físico e que seu respectivo hamiltoniano revela de fato o balanço de energia do oscilador, que também depende do tempo, como mostra a equação (3.5), diferentemente do que se concluiu na análise dos osciladores Lane-Emden e Caldirola-Kanai [5].

Por fim, sugerimos um sistema de massa variável como modelo físico para o conjunto de soluções da equação diferencial proposta (2.6). Este se mostrou consistente apenas com a solução gaussiana  $x_1(t)$  por ter amplitude decrescente com o tempo, como esperado. Todavia, o mesmo não foi possível verificar na solução  $x_2(t)$  dada pela (2.20), que sugere um amortecimento muito fraco, o que a deixou idêntica nula com as aproximações realizadas (ver fig. 3), deixando-a com uma viabilidade restrita a regimes de tempo finitos.

# Referências

- [1] José Maria Filardo Bassalo and Mauro Sérgio Dorsa Cattani. *Osciladores Harmônicos Clássicos e Quânticos*. Editora Livraria da Física, 2009.
- [2] Morris Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times: Volume 2*, volume 2. Oxford university press, 1990.
- [3] Ana Paula Bispo da Silva and Roberto de Andrade Martins. Maupertuis e o princípio mecânico de ação mínima: uma análise crítica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29:625–633, 2007.
- [4] Clifford Truesdell. *Essays in the History of Mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] V Aguiar and I Guedes. Osciladores harmônicos amortecidos dependentes do tempo. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 35, 2013.
- [6] John R Ray. Lagrangians and systems they describe—how not to treat dissipation in quantum mechanics. *American Journal of Physics*, 47(7):626–629, 1979.
- [7] George Arfken and Hans Hermann Weber. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. Elsevier, 2007.
- [8] José Maria Filardo Bassalo and Mauro Sérgio Dorsa Cattani. *Elementos de física matemática: equações diferenciais ordinárias, transformadas e funções especiais*, volume 1. Editora Livraria da Física, 2010.
- [9] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor*, volume 2. Editora Blucher, 2018.
- [10] Marcelo Alonso and Edward J Finn. *Física: Um curso universitário-Mecânica*, volume 1. Editora Blucher, 2018.
- [11] H. Bateman. On dissipative systems and related variational principles. *Phys. Rev.*, 38:815–819, Aug 1931.
- [12] P. Caldirola. Forze non conservative nella meccanica quantistica. *Il Nuovo Cimento (1924-1942)*, 18:393–400, 1941.
- [13] E KANAI. On the quantization of the dissipative systems. *progress of theoretical physics(1948)*, 3:440–442, 1941.
- [14] L. et al HERRERA. A variational principle and the classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator. *American Journal of Physics*, 57:273–277, 1986.

## 4.1 Apêndice 1 - códigos do *Google Collaboratory* para geração de gráficos

**FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ****PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO****DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS****ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE FÍSICA**

GRÁFICOS E ANÁLISES DA monografia DE MARCOS CAVALCANTE FURTADO

Segue os códigos para as soluções da equação do oscilador amortecido

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0.$$

Existem três tipos de soluções diferentes em relação ao valor crítico  $c_c = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$ : amortecimento subcrítico ( $c < c_c$ ), crítico ( $c = c_c$ ), e supercrítico ( $c > c_c$ ). Segue abaixo o código com exemplos.

```

1 # PLOT DA SEÇÃO 2 - OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO (OHA) CONVENCIONAL
2
3 import numpy as np
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 import matplotlib.font_manager as fm
6
7 # Definir as dimensões do gráfico
8 plt.rcParams['figure.figsize'] = [16, 10]
9
10 t = np.linspace(0,30,1000) # variável x
11
12 def oscilador(m=1, rho=1, w0=1, A=1, B=1):
13
14     """
15     Função para plotar as soluções do oscilador amortecido.
16
17     m = massa em kg.
18     rho = constante de proporcionalidade à força de arrasto em N/(m/s).
19     w0 = frequência natural do oscilador harmônico simples (rad/s).
20     A, B = constantes da combinação linear das soluções L.I.
21     return => retorna a função calculada com os parâmetros definidos.
22     """
23     gamma = rho/m # constante gamma
24
25     if gamma/2 < w0:
26         apelido_curva = "SUBCRÍTICO"
27         cor = "red"
28         omega = np.sqrt(w0**2 - gamma**2/4)
29         x = np.exp(-gamma*t/2)*(A*np.cos(omega*t)+B*np.sin(omega*t))
30         return x
31     elif gamma/2 > w0:
32         apelido_curva = "SUPERCRÍTICO"
33         cor = "blue"
34         beta = np.sqrt(gamma**2/4 - w0**2)
35         x = np.exp(-gamma*t/2)*(A*np.exp(beta*t)+B*np.exp(-beta*t))
36         return x
37     elif gamma/2 == w0:
38         apelido_curva = "CRÍTICO"
39         cor = "green"
40         x = np.exp(-gamma*t/2)*(A+B*t)
41         return x
42
43 W = oscilador(1, 10, 4)
44 X = oscilador(1, 0.5, 4)
45 Z = oscilador(1, 2, 4)
46
47 plt.plot(t, W, label="SUPERCRÍTICO", color="blue", lw=2)
48 plt.plot(t, X, label="SUBCRÍTICO", color="red", lw=2)
49 plt.plot(t, Z, label="CRÍTICO", color="green", lw=2)
50
51 font = fm.FontProperties(family='DejaVu Sans')
52 plt.grid()
53 plt.legend(loc="upper right")
54 plt.xlabel("X", fontproperties=font)
55 plt.ylabel("Y", fontproperties=font)
56 #plt.ylim(-10, 10)
57 #plt.xlim(0, 2)
58 plt.savefig("osciladores_amortecidos.png", dpi=500)
59 plt.show()
60 print("\033[1m Figura 1: \033[0m Osciladores amortecidos convencionais.")
61

```

↵

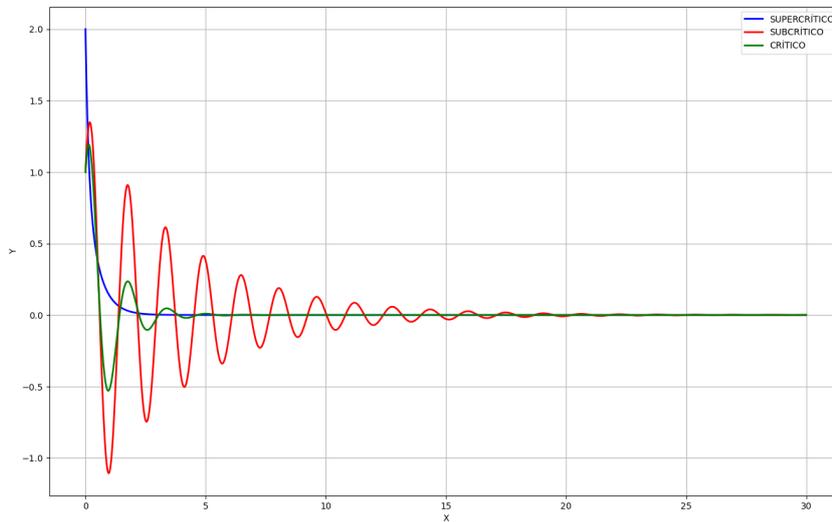


Figura 1: Osciladores amortecidos convencionais.

Segue os códigos para as soluções da equação do oscilador amortecido com parâmetro de amortecimento linearmente variável ( $\gamma(t) = \alpha t$ )

$$m\ddot{x}(t) + \gamma(t)\dot{x}(t) + kx(t) = 0.$$

Neste caso, as duas soluções linearmente independentes, obtidas via Método de Fröbenius, são mostradas a seguir, assim como sua superposição.

```

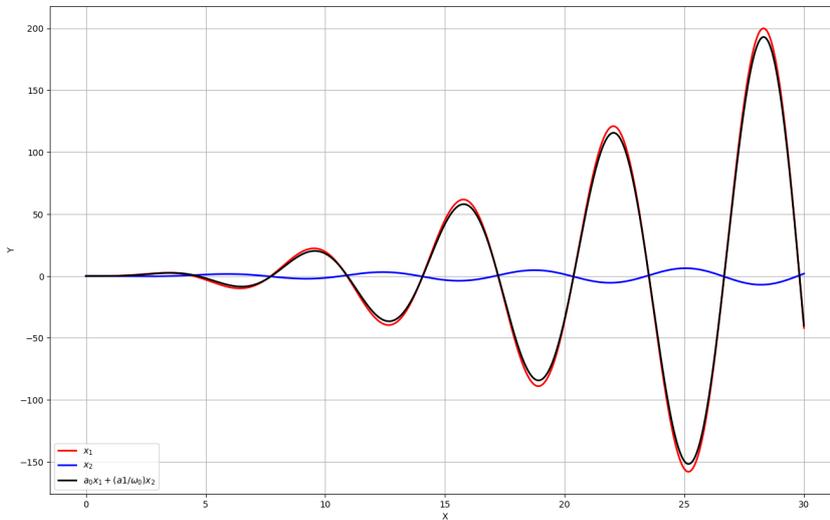
1 # plot das soluções x_1 e x_2 com parâmetro de amortecimento variável
2
3 #from math import factorial # função fatorial
4 from scipy.special import factorial
5
6 alpha = 1 # parâmetro de amortecimento - liga (!=0) e desliga (==0)
7 w0 = 1 # frequência natural do sistema
8 a0 = a1 = 1 # constantes da combinação linear
9 t2 = np.linspace(0, 30, 1000)
10
11 def x_1(t, M):
12     y = 0
13     n = 0
14     for i in range(0, M+1):
15         y += a0*(-1)**(n+1)*n*(n+1)*alpha*w0**(2*n)*t**(2*n+2)/(factorial(2*n+2))
16         n += 1
17     return y
18
19
20 def x_2(t,M):
21     y = 0
22     n = 0
23     for i in range(0, M+1):
24         y += (-1)**n*n**2*alpha*w0**(2*n-1)*t**(2*n+1)/(factorial(2*n+2))
25         n += 1
26     return y
27
28
29 sol_1 = x_1(t2, 80)
30 sol_2 = x_2(t2, 80)
31 sol_amort_var = a0*sol_1 + (a1/w0)*sol_2

```

```

32 plt.plot(t2, sol_1, color='red', label=r"$x_1$", lw=2)
33 plt.plot(t2, sol_2, color='blue', label=r"$x_2$", lw=2)
34 plt.plot(t2, sol_amort_var, color='black', label=r"$a_0x_1+(a_1/\omega_0)x_2$", lw=2)
35 plt.grid()
36 plt.legend(loc='lower left')
37 plt.xlabel("X", fontproperties=font)
38 plt.ylabel("Y", fontproperties=font)
39 plt.show()
40 print("\033[1m Figura 2: \033[0m Osciladores com amortecimento linearmente variável.")
41

```



**Figura 2:** Osciladores com amortecimento linearmente variável.

Da relação de recorrência

$$(n + 2)a_{n+2} + a_n = 0,$$

pode-se simplificar estas expressões para obter a solução geral, se  $\alpha = 1$  e  $\omega_0^2 = 1$ :

$$x(t) = a_0 e^{-\frac{t^2}{2}} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!} t^{2n+1}.$$

Aqui,  $x_1(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$  e  $x_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!} t^{2n+1}$ .

```

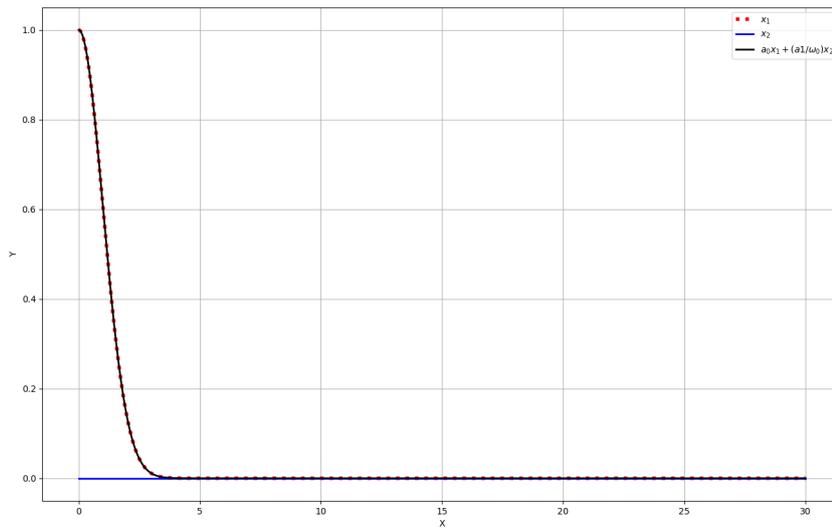
1 # Plot das soluções depois da manipulação matemática adequada
2
3 alpha = 1          # parâmetro de amortecimento - liga (!=0) e desliga (==0)
4 w0 = 1            # frequência natural do sistema
5 a0 = a1 = 1       # constantes da combinação linear
6
7
8 def x_2_manipulada(t,M):
9     y = 0
10    n = 0
11    for i in range(0, M+1):
12        y += (-1)**n*n**2*alpha*w0**(2*n-1)*t**(2*n+1)/(factorial(factorial(2*n+2)))
13        n += 1
14    return y
15

```

```

16
17 sol_1_man = np.exp(-t2**2/2)
18 sol_2_man = x_2_manipulada(t2, 80)
19 sol_amort_var_man = a0*sol_1_man + (a1/w0)*sol_2_man
20
21 # Definir as dimensões da figura
22 fig = plt.gcf()
23 fig.set_size_inches(16, 10)
24
25 # Adicionar uma régua de escala
26 #sb.add_scalebar(fig, 1, loc='lower right', pad=0.5)
27
28 plt.plot(t2, sol_1_man, color='red', label=r"$x_1$", lw=4, linestyle=':')
29 plt.plot(t2, sol_2_man, color='blue', label=r"$x_2$", lw=2)
30 plt.plot(t2, sol_amort_var_man, color='black', label=r"$a_0x_1+(a_1/\omega_0)x_2$", lw=2)
31 plt.grid()
32 plt.legend(loc='upper right')
33 plt.xlabel("X", fontproperties=font)
34 plt.ylabel("Y", fontproperties=font)
35 plt.show()
36 print("\033[1m Figura 3: \033[0m Osciladores com amortecimento linearmente variável. Caso particular onde uma das soluções
37

```



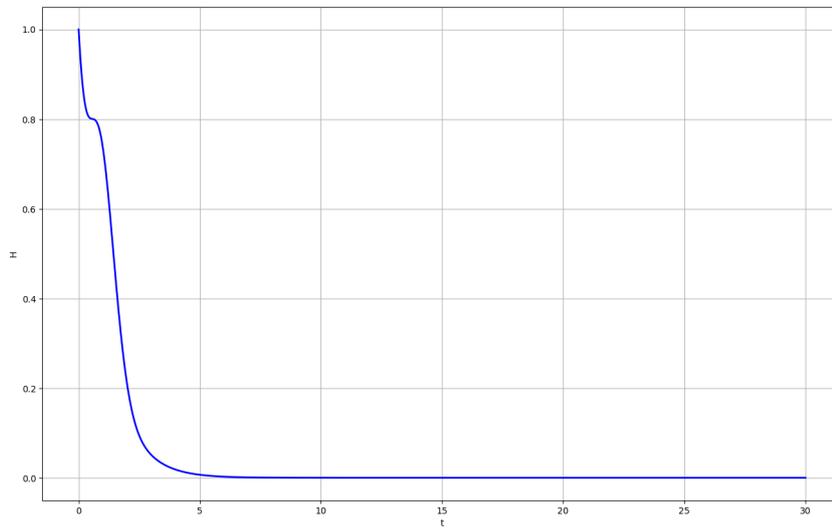
**Figura 3:** Osciladores com amortecimento linearmente variável. Caso partic



```

1 # plot da função hamiltoniana H (eq. 3.5)
2 c = 1
3 m = 1
4 E = 1
5 k = 1
6 H = np.exp(-c*t/m)*E + (m*a0**2/2)*t**2*np.exp(-t**2) + (k*a0**2/2)*t**2*np.exp(-t**2)
7
8 plt.plot(t, H, color='blue', lw=2)
9 plt.grid()
10 plt.xlabel('t', fontproperties=font)
11 plt.ylabel('H', fontproperties=font)
12 plt.show()
13 print('\033[1m Figura 4: \033[0m Gráfico da hamiltoniana dada na equação (3.5), com todos os parâmetros feitos iguais à un

```



**Figura 4:** Gráfico da hamiltoniana dada na equação (3.5), com todos os parâmetros



## 4.2 Apêndice 2 - capa da publicação gerada durante o desenvolvimento deste trabalho

# Oscilador harmônico simples, série e transformada de Fourier e operador de Sturm-Liouville – uma breve discussão

Simple Harmonic Oscillator, Series, and Fourier Transform and Sturm-Liouville Operator –  
A Brief Discussion

Lucas dos S. Barros<sup>1,2</sup>, Marcos Cavalcante<sup>2</sup>, Paulo Soledade<sup>2,3</sup>,  
David A. Sbrissa Neto<sup>2,3</sup>, Marcelo Siqueira<sup>\*2,3</sup>

<sup>1</sup>Instituto Federal do Amapá, Curso de Licenciatura em Física, Macapá, AP, Brasil.

<sup>2</sup>Universidade Federal do Amapá, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Macapá, AP, Brasil.

<sup>3</sup>Universidade Federal do Amapá, Grupo Amazônico de Materiais e Energias Renováveis, Macapá, AP, Brasil.

Recebido em 28 de fevereiro de 2023. Aceito 12 de abril de 2023.

Neste trabalho destacamos a importância do oscilador harmônico simples como um modelo matemático fundamental para a compreensão de fenômenos oscilatórios em diversas áreas da Física e Engenharia, enfatizando a necessidade de se conhecer os métodos para a sua solução, que servem como ponto de partida para estudar sistemas mais complexos. Embora esse tema seja relevante, muitos estudos se limitam a aplicações práticas ou soluções gerais de equações diferenciais, sem conexão significativa entre conceitos. Neste sentido, propõe-se uma abordagem que explora a conexão entre o oscilador harmônico, série e transformada de Fourier. Através da teoria do operador linear de Sturm-Liouville, introduzimos conceitos como autofunções de um operador hermitiano, ortogonalidade e formação de espaços vetoriais. Enquanto a série surge como uma expansão em uma base infinita de funções dentro de um intervalo finito, a transformada surge como uma projeção de objetos matemáticos como funções e equações no espaço das autofunções do oscilador em um intervalo infinito. Espera-se que essa abordagem estimule discussões e facilite a compreensão de tópicos mais avançados em Física e áreas afins, tornando-os mais acessíveis a estudantes de graduação e pós-graduação.

**Palavras-chave:** Oscilador harmônico; série e transformada de Fourier; operador de Sturm-Liouville.

In this work we highlight the importance of the simple harmonic oscillator as a fundamental mathematical model for the understanding of oscillatory phenomena in several areas of Physics and Engineering, emphasizing the need to know the methods for its solution, which serve as a starting point for studying systems more complex. Although this topic is relevant, many studies are limited to practical applications or general solutions of differential equations, with no significant connection between concepts. In this sense, an approach is proposed that explores the relationship between the harmonic oscillator, series and Fourier transform. Through the theory of the Sturm-Liouville linear operator, we introduce concepts such as the eigenfunctions of a Hermitian operator, orthogonality, and the formation of vector spaces. While the series appears as an expansion on an infinite basis of functions within a finite interval, the transform arises as a projection of mathematical objects such as functions and equations onto the space of the oscillator's eigenfunctions into an infinite interval. It is hoped that this approach will stimulate discussions and facilitate the understanding of more advanced topics in Physics and related areas, making them more accessible to undergraduate and graduate students.

**Keywords:** Harmonic oscillator; series and Fourier transform; Sturm-Liouville operator.

## 1. Introdução

As oscilações fazem parte de todos os aspectos de nossa vida. Seja no estudo da estabilidade de fenômenos mecânicos, descrição do fluxo de calor através de materiais, na emissão de sinais eletromagnéticos ou mesmo na descrição de sistemas quânticos com níveis de energia igualmente espaçados, as oscilações surgem como um aspecto fundamental da física. Todos estes fenômenos

têm em comum a sua descrição feita em maior ou menor grau pela equação do oscilador harmônico simples (OHS). Muito mais próximo de um dos ditos *toy models* da física, este sistema é de extrema importância pois suas propriedades servem de ponto de partida para estudos de sistemas mais avançados e as técnicas envolvidas para tratar de tais sistemas podem ser adaptadas para estudos mais complexos. Neste sentido, revisitar o OHS é de extrema importância.

Uma das primeiras aparições do OHS que se tem registro é devida ao físico e matemático Leonard Euler

\*Endereço de correspondência: [marcelo.siqueira@unifap.br](mailto:marcelo.siqueira@unifap.br)